

Mémoire de mathématiques

Une investigation sur le rôle des transformations de Fourier dans le
traitement des données EEG

Question de recherche : Dans quelle mesure l'interprétation des
signaux EEG par les transformées de Fourier sont-elles une manière de
calculer les ondes cérébrales ?

Nombre de mots : 3455

Contenu

❖ Introduction.....	3
❖ Contexte mathématique.....	4
2.1 Transformée de Fourier.....	4
2.2 Transforme de Fourier discrète.....	7
❖ Méthodologie.....	8
❖ Échantillon 1.....	9
❖ Échantillon 2.....	13
❖ Bibliographie.....	18
❖ Indexe.....	19

❖ Introduction

Depuis le début de mon adolescence, je me suis intéressé aux interfaces cerveau-ordinateur (ICO), une intersection entre la neuroscience et l'informatique. Cette technologie permet la communication directe entre le cerveau et un ordinateur en interprétant les signaux électriques générés par l'activité neuronale. Elle représente une avancée prometteuse pour les personnes souffrant de troubles cognitifs et neurologiques (He et al., 2023). Une telle condition est le délire, une condition qui touchait mon grand-père, qui peut être apaisé à l'aide des ICO.

Chez les ICO, afin, d'interpréter l'information provenant du cerveau, il est courant de convertir les données d'électroencéphalogramme (EEG) brutes en ondes cérébrales pour mieux comprendre l'état cognitive d'une personne. Ces ondes sont généralement classées en différentes bandes de fréquence : les ondes delta (0,5-4 Hz), thêta (4-8 Hz), alpha (8-14 Hz), bêta (14-30 Hz) et gamma (30-100 Hz), chacune étant associée à divers états de conscience et de cognition (Roohi-Azizi et al., 2017). L'analyse de la distribution de ces ondes constitue l'une des méthodes les plus simples et propices pour extraire des informations utiles à partir des signaux EEG. Ce processus de conversion est faite grâce aux séries de Fourier, des outils mathématiques qui permettent de représenter des fonctions périodiques comme une somme de fonctions sinusoïdales. Plus précisément, la transformation de Fourier permet de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel, facilitant ainsi l'extraction d'informations essentielles sur l'activité cérébrale sur une certaine intervalle de données EEG. On peut dire, il est particulièrement important que les calculs soient optimisés pour garantir une analyse efficace et rapide des signaux EEG. Bref, ceci soulève la question de recherche proposée pour cet essai: « Dans quelle mesure l'interprétation des signaux EEG par les transforme de Fourier sont-elles une manière efficace de computer les ondes cérébrales ? »

❖ Contexte mathématique

2.1 Transformée de Fourier

La transformation de Fourier est un outil mathématique fondamental permettant de décomposer une fonction temporelle en un ensemble de fréquences. Cet outil est présent dans plusieurs domaines scientifiques et techniques, notamment dans la science neurologique. L'idée sous-jacente est de traduire l'information d'une représentation temporelle en représentation fréquentielle, de manière à saisir clairement les composantes sinusoïdales qui composent le signal initial.

La transformation de Fourier repose typiquement sur deux équations principales : la transformée directe et la transformée inverse. Soit $f(t)$ une fonction définie sur l'axe du temps et ν la fréquence en Hz, la transformée de Fourier directe se définit comme :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

Comme le nom le suggère, l'équation représente la transformation directe d'une fonction de temps dans une fonction de fréquence (Britannica, 2025). Inversement, connu comme la transformée de Fourier inverse, elle permet de revenir du domaine fréquentiel au domaine temporel :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

Elle réassemble l'ensemble des sinusoïdes pondérées par $F(\nu)$, recréant ainsi la fonction $f(t)$ initiale.

Ces équations peuvent sembler être très menaçant. En effet, il existe plusieurs termes différents, parmi eux un terme imaginaire. De plus, en apercevant des images de cette conversion de domaine en ligne (voir figure 1), le rôle du déphasage dans les fonctions sinusoïdales demeurerait inéclairé.

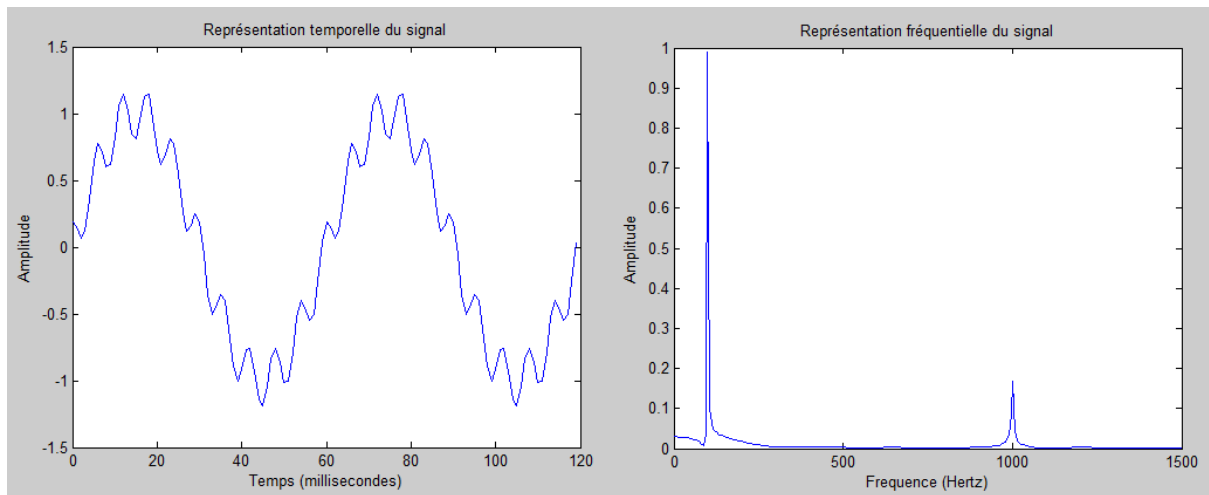


Figure 1 (Sciences et Techniques, 2012)

Pour clarifier ceci, il est nécessaire de comprendre l'équation de la transformée de Fourier, afin de compléter notre investigation sur le rôle des transformations de Fourier dans la manipulation des données EEG.

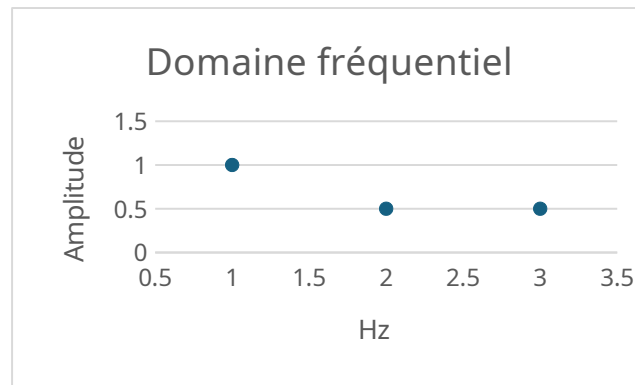


Figure 2 (Réalisé par l'auteur sur GeoGebra)

Ci-dessus est la représentation graphique du fonction

$f(t) = \cos(2\pi t) + 0.5 \cos(4\pi t) + 0.5 \cos(6\pi t)$ qui a le domaine de fréquence dans la fonction de cos suivante :

Figure 3 (Réalisé par l'auteur sur Microsoft Excel)



Elle peut s'écrire comme une somme de cosinus à différentes fréquences ν , avec des amplitudes $A(\nu)$ spécifiques et discrète:

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A(\nu) \cos(2\pi\nu t)$$

où chaque terme $\cos(2\pi\nu t)$ représente une composante sinusoïdale de fréquence ν . Cette forme discrète suppose que seules certaines valeurs de ν (par exemple, 1 Hz, 2 Hz, 3 Hz, etc.) interviennent dans la décomposition. Toutefois, si l'on considère toutes les fréquences possibles (et non plus seulement un ensemble discret), la somme devient une intégrale. On définit alors une fonction $A(\nu)$ continue, qui décrit l'amplitude fréquentielle pour chaque ν .

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) \cos(2\pi\nu t) d\nu$$

Dans un cas purement réel, on peut employer une combinaison de cos et sin, pour représenter le déphasage mais on préfère souvent écrire l'exponentielle complexe $e^{2\pi i \nu t}$. Ceci est possible car le déphasage et l'amplitude sont représentatif ensemble avec le système des nombres complexes.

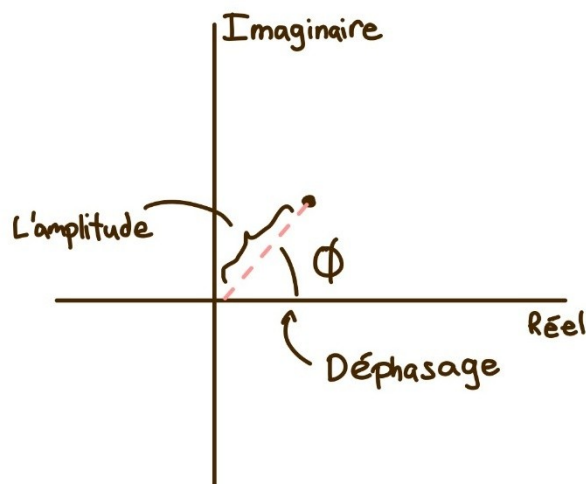


Figure 4 (Réalisé par l'auteur sur GoodNotes)

Quand ϕ (le déphasage), provenant de l'équation $A \sin(\omega t + \phi)$ est égale à 0 l'équation ci-dessus est applicable. Toutefois, il existe plusieurs fonctions sinusoïdales avec des valeurs ϕ non nulles, qui compose des fonctions temporelles. Par exemple, si $\phi = \frac{\pi}{4}$ et $A = 1$, en calculant les côtés du triangle rectangle pour déterminer le domaine réel et imaginaire nous permet de trouver $réel = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $imaginaire = \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Maintenant, nous avons un moyen complexe de contenir l'amplitude et le déphasage, qui rend la transformation de $A(v) \Rightarrow F(v) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. De plus, avec la formule décrit par Euler : $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$, $A(v) \cos(2\pi vt)$ devient $F(v) e^{2\pi i vt}$. De cette manière on obtient la fonction du transformée de Fourier inverse : $\int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{2\pi i vt} dv$.

2.2 Transforme de Fourier discrète

La transformée de Fourier discrète (TFD), contrairement à la transformée de Fourier continue, s'applique à un ensemble discret de données échantillonnées à intervalles réguliers. En d'autres termes, au lieu de considérer une fonction $f(t)$ définie pour un domaine avec tout réel t , on traite t sur un nombre limité de points, typiquement acquis à une certaine fréquence d'échantillonnage. Il a été nécessaire de comprendre la transformée de Fourier continue parce que la TFD est basé sur ce dernier, et non l'inverse. Cette approche diffère de la transformée continue dans laquelle on n'intègre pas sur tout l'axe du temps (Introduction to Fourier Transform, 2013).

Pourquoi est-ce utile ? Dans le monde numérique, la plupart des signaux sont traités sous forme discrète. Notamment, lorsqu'on enregistre un EEG, on ne mesure pas les valeurs du signal en continu : on en prend un échantillon à chaque fraction de seconde, connu comme un taux d'échantillonnage, ce qui aboutit un ensemble de longueur N . La TFD permet alors de décomposer cet ensemble en une

séquence de fréquences également de longueur N . Ceci traduit dans une fonction qui ressemble comme ceci :

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

Dans la pratique, on échantillonne donc le signal à intervalles de temps réguliers, ce qui produit une suite de valeurs $f[0], f[1], \dots, f[N-1]$. On peut alors appliquer la transformée de Fourier discrète, qui prend la forme d'une somme finie au lieu d'une intégrale. Ici, la variable ν continue n'existe plus : elle est remplacée par un ensemble de fréquences discrètes, également espacées, et dont la résolution dépend du nombre d'échantillons N . De même que pour la transformée de Fourier continue, il existe une transformée de Fourier discrète inverse qui permet de retrouver la suite d'origine à partir de $F[k]$. Cette transformée inverse s'écrit :

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

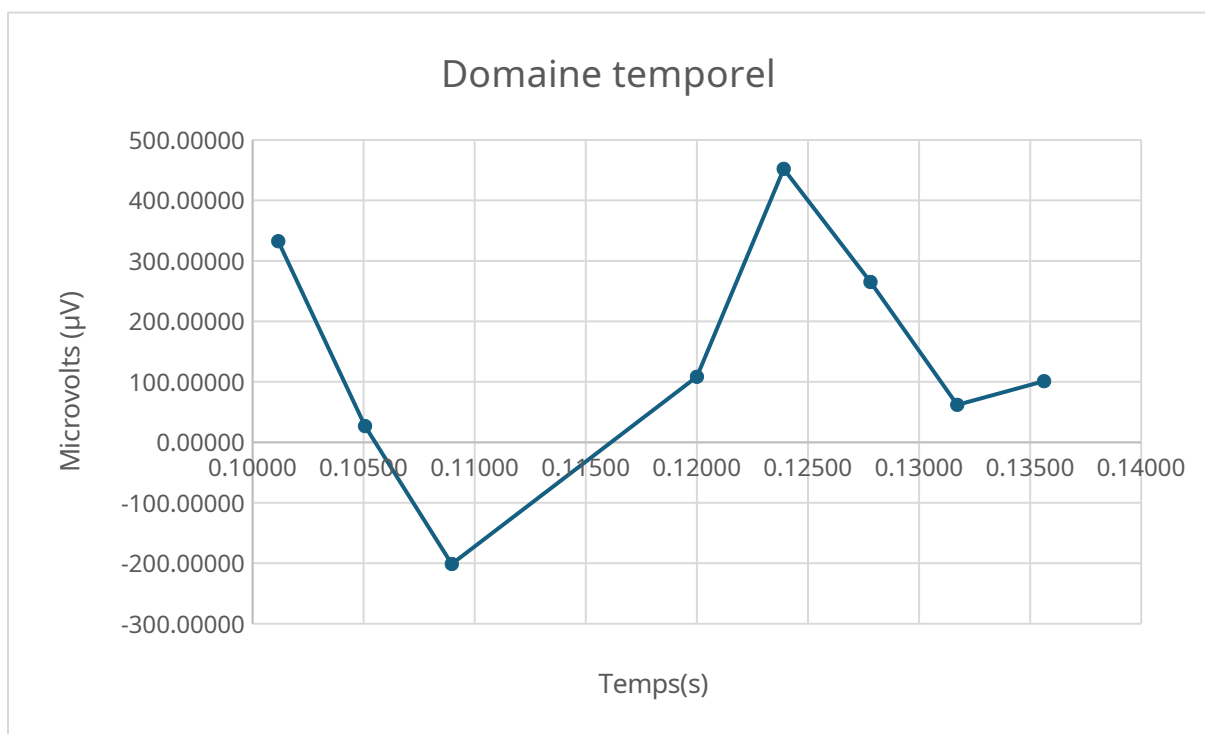
Ainsi, en passant de la transformée continue à la transformée discrète, on passe d'une intégrale sur toutes les fréquences à une somme sur un nombre fini de fréquences. Cela reflète le fait que, dans les systèmes numériques, le signal n'est plus observé de façon continue dans le temps, mais à des instants précis séparés par la période d'échantillonnage. L'avantage de cette approche est que tout peut être traité et stocké sur un ordinateur, tandis que l'inconvénient est qu'on perd l'information exacte entre les instants d'échantillonnage, ce qui impose des contraintes comme la limite de la fréquence maximale observable comme la fréquence de Nyquist (Gatan, 2025). Malgré cela, la transformée de Fourier discrète reste un outil essentiel en traitement du signal et en analyse de données, car elle permet de travailler efficacement avec des signaux enregistrés dans un contexte numérique.

❖ Méthodologie

Dans cette étude, nous allons utiliser les transformée de fourrier afin de convertir un échantillon de données EEG dans des ondes cérébraux. Nous collecterons les données EEG grâce à un casque non-envahissant, connu comme le Muse 2. Ensuite, nous effectuerons des calculs sur nos données pour les transformer au domaine fréquentiel. Ceci nous permettra de déterminer la présence et l'amplitude des ondes cérébrales spécifiques à partir de notre donnée brute.

1. Collecter 8 et 256 points de données EEG, à 256 échantillons par secondes, à l'aide de la diffusion provenant du casque.
2. Appliquer la transformée de Fourier discrète (DFT) sur les données aux complètes pour représenter l'amplitude des bandes d'ondes spécifiques.
3. Analyser et discuter de la capacité de la transformée de Fourier à exprimer les ondes cérébrales, en mettant en évidence la validité du transforme de Fourier.

❖ Échantillon 1



Graphique 1 (Échantillon de 8 points de données d'EEG brutes produits par l'auteur)

Pour illustrer le processus d'effectuer une transformation de Fourier discrète et la façon dont apparaissent les nombres complexes, prenons ces huit valeurs comme un signal échantillonné. Ces données sont représentées dans le tableau ci-contre :

Temps (s)	Microvolts (μV)
0.10116	332.51953
0.10506	26.85547
0.10897	-201.17188
0.12000	108.39844
0.12391	452.14844
0.12781	265.13672
0.13172	62.01172
0.13562	101.07422

On dispose de huit valeurs échantillonnées entre 0,10116 s et 0,13562 s, chaque point étant noté $f(n)$ pour n allant de 0 à 7. La formule utilisée est

$$F[k] = \sum_{n=0}^7 f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{8}}, \quad k=0, 1, \dots, 7$$

Chaque coefficient $F[k]$ est un nombre complexe qui encode l'amplitude et le déphasage de la composante fréquentielle associée à l'indice k . Par ailleurs, la relation entre l'indice k et la fréquence en hertz est donnée par :

$$\nu_k = \frac{k f_s}{8}, \quad k=0, 1, \dots, 7$$

Où f_s représente la fréquence d'échantillonnage estimée ou mesurée, dans ce cas $f_s = 256$. Donc, les fréquences concernées sont 0 Hz, 32 Hz, 64 Hz, ..., 224 Hz.

Si l'on veut illustrer le calcul pour un seul coefficient, on peut prendre $k=0$. Dans ce cas, l'exponentielle vaut 1 pour tout n , et on obtient :

$$F[0] = \sum_{n=0}^7 f[n]$$

Cette valeur correspond à la composante de fréquence nulle et représente tous décalage verticale dans la fonction, elle est la somme brute de tous les échantillons. Lorsqu'on considère un autre indice $k \neq 0$, les exponentielles introduisent des termes en cosinus et en sinus, car :

$$e^{-2\pi i 8 kn} = \cos\left(\frac{2\pi kn}{8}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi kn}{8}\right)$$

Chaque point $f(n)$ se retrouve alors multiplié par un facteur complexe différent pour chaque k . Une fois tous les $F[k]$ calculés, on peut séparer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun. La partie réelle correspond à la somme pondérée des cosinus, et la partie imaginaire à celle des sinus. Cela permet d'extraire l'amplitude et le déphasage.

Par exemple, pour $k = 3$, représentant 96 Hz:

$$F[3] = \sum_{n=0}^7 f[n] e^{-\frac{6\pi i n}{8}}$$

$$F[3] = f[0] e^{-\frac{6\pi i (0)}{8}} + f[1] e^{-\frac{6\pi i (1)}{8}} + f[2] e^{-\frac{6\pi i (2)}{8}} + f[3] e^{-\frac{6\pi i (3)}{8}} + f[4] e^{-\frac{6\pi i (4)}{8}} + f[5] e^{-\frac{6\pi i (5)}{8}} + f[6] e^{-\frac{6\pi i (6)}{8}} + f[7] e^{-\frac{6\pi i (7)}{8}}$$

$$F[3] = f[0] + f[1] e^{-\frac{6\pi i}{8}} + f[2] e^{-\frac{12\pi i}{8}} + f[3] e^{-\frac{18\pi i}{8}} + f[4] e^{-\frac{24\pi i}{8}} + f[5] e^{-\frac{30\pi i}{8}} + f[6] e^{-\frac{36\pi i}{8}} + f[7] e^{-\frac{42\pi i}{8}}$$

$$F[3] = 332,5 + 26,9 e^{-\frac{6\pi i}{8}} + (-201,2) e^{-\frac{12\pi i}{8}} + 108,4 e^{-\frac{18\pi i}{8}} + 452,1 e^{-\frac{24\pi i}{8}} + 265,1 e^{-\frac{30\pi i}{8}} + 62,0 e^{-\frac{36\pi i}{8}} + 10 e^{-\frac{42\pi i}{8}}$$

En utilisant la formule d'Euler : $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$

$$F[3] = 332,5 + 26,9 \left(\cos\left(-\frac{6\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{6\pi}{8}\right) \right) + (-201,2) \left(\cos\left(-\frac{12\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{12\pi}{8}\right) \right) + 108,4 \left(\cos\left(-\frac{18\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{18\pi}{8}\right) \right) + 452,1 \left(\cos\left(-\frac{24\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{24\pi}{8}\right) \right) + 265,1 \left(\cos\left(-\frac{30\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{30\pi}{8}\right) \right) + 62,0 \left(\cos\left(-\frac{36\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{36\pi}{8}\right) \right) + 10 \left(\cos\left(-\frac{42\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{42\pi}{8}\right) \right)$$

$$F[3] = 332,5 + (-19,03 - i 19,03) + (-i 201,2) + (76,6 - i 76,6) + (-452,1) + (187,5 + i 187,5) + (-i 62) + (-10 + i 10)$$

$$F[3] = 332,5 - 19,03 + 76,6 - 452,1 + 187,5 - 71,4 + i(-19,03 - 201,2 - 76,6 + 187,5 - 62 + 71,4)$$

$$F[3] \approx 54,03 - i 61,9$$

À partir du nombre complexe $F[3]$ qui représente $54,03 - i 61,9$, l'amplitude est déterminée en trouvant la valeur absolue de $F[3]$ pour lequel $|F[3]| \approx 82,2$. Comme expliqué dans le

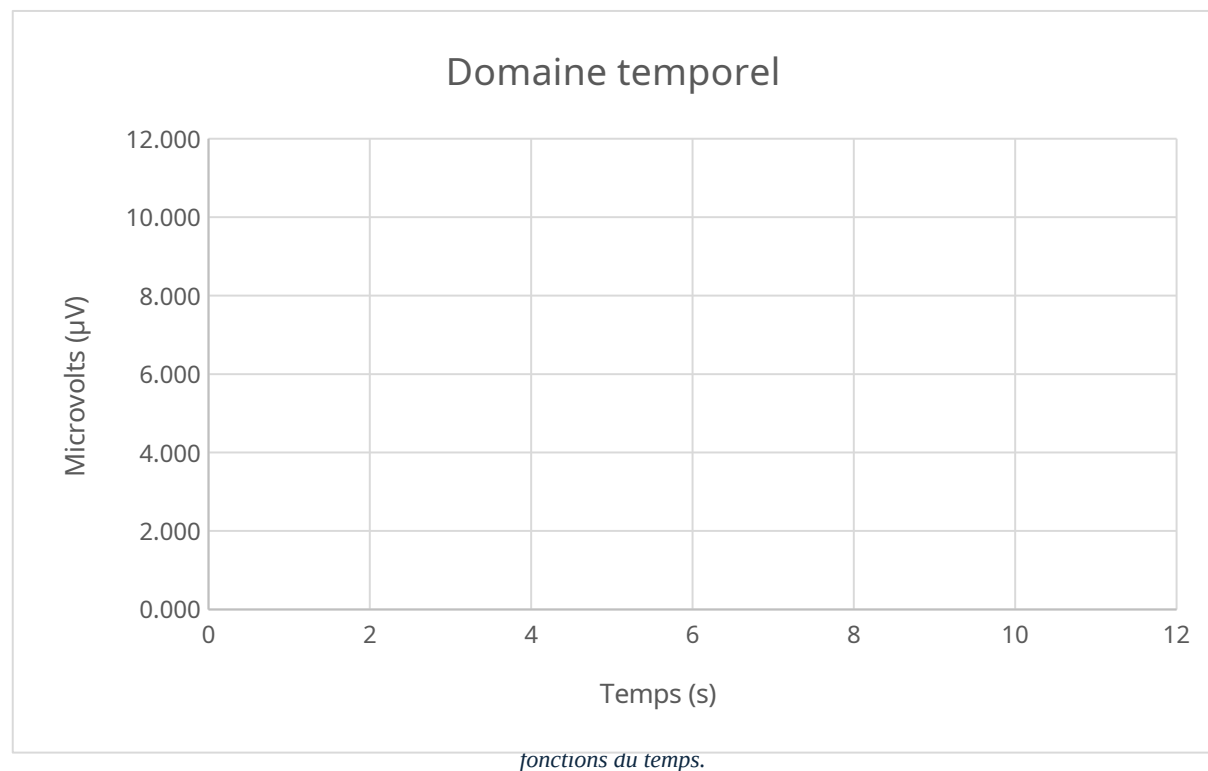
contexte de cet essai, le déphasage est trouvé de la manière suivante :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}(F[3])}{\text{Re}(F[3])}\right) = -0,85 \text{ rad} \approx -48,7^\circ. \text{ En répétant ce processus pour le reste des valeurs } k \text{ on}$$

obtient la représentation du domaine fréquentiel dans un tableau :

Hz	Amplitude
0	1147
32	295
64	928
96	82,2
128	144
160	82,2
192	928
224	295

❖ Échantillon 2



Ce graphique ci-dessus démontre 256 points de données collectées en microvolts, tirées du premier canal sur la gauche du casque EEG. Vous pouvez trouver le tableau de données correspondant au premier échantillon dans l'indexe A.

Le TFD d'un ensemble de $N = 256$ échantillons s'écrit :

$$F[k] = \sum_{n=0}^{255} f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{256}}, \quad k=0, 1, \dots, 255$$

Pour réaliser la TFD, il faut noter que ces données sont échantillonnées de manière régulière, ici, l'échantillon à une fréquence d'échantillonnage $f_s \approx 256 \text{ Hz}$. Similairement au premier échantillon, à $k=0$, l'exponentielle devient $e^{-\frac{2\pi i (0) n}{256}} = 1$, donc on obtient :

$$F[0] = \sum_{n=0}^{255} f[n]$$

Cela signifie que la composante de fréquence nulle $F[0]$ est simplement la somme de toutes les valeurs temporelles. Tandis que pour chaque k de 1 à 255, le terme $e^{-\frac{2\pi i k n}{256}}$ fournira la pondération complexe qui permet d'extraire à la fois l'amplitude et la phase associées à la fréquence correspondante.

La fréquence réelle associée à l'indice k est donnée par :

$$\nu_k = \frac{k f_s}{256}, \quad k=1, 2, \dots, 255$$

Le nombre élevé de points de données nous permet de mieux analyser la présence et l'amplitude des fréquences spécifiques comparées à notre expérience avec l'échantillon 1, ayant de 1 Hz, 2 Hz, ..., 255 Hz.

Grace à cela, lorsqu'on complète le reste des calculs avec un scripte python (Indexe B) ont réussi à obtenir un aperçu dans la distribution ondes cérébrales dont : delta (0,5-4 Hz), thêta (4-8 Hz), alpha (8-14 Hz), bêta (14-30 Hz) et gamma (30-100 Hz).

Onde cérébrales	Amplitude
-----------------	-----------

	moyen
Delta (0,5-4 Hz)	223.3
Thêta (4-8 Hz)	319.6
Alpha (8-14 Hz)	158.0
Bêta (14-30 Hz)	117.4
Gamma (30-100 Hz)	133.9

❖ Transformée de Fourier sur l'ordinateur

L'utilisation de la transformée de Fourier discrète (TFD) pour analyser un signal EEG est illustrée dans l'Indexe B, qui contient le code Python (Github, 2022) permettant de calculer directement les coefficients fréquentiels d'un ensemble de données échantillonnées. En pratique, cependant, la TFD « brute » exige un nombre d'opérations $O(N^2)$, ce qui devient rapidement coûteux lorsque la taille N du signal augmente. C'est précisément la raison pour laquelle la « Transformée de Fourier Rapide » (TFR) est fréquemment utilisée : elle exploite des symétries mathématiques et ramène la complexité à $O(N \log N)$, rendant le calcul bien plus rapide.

Dans le code de l'Indexe A, chaque coefficient $F[k]$ est calculé en parcourant tous les échantillons $f[n]$. Pour chaque paire (k, n) , on multiplie la valeur $f[n]$ par le facteur exponentiel $e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$ et on accumule ces contributions dans la somme. C'est exactement la définition mathématique de la TFD :

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

Cette approche, bien que conforme à la théorie, effectue un total de $N \times N = N^2$ multiplications-complexes-et-additions, ce qui peut ralentir considérablement le traitement si N est grand. La TFR, quant à elle, décompose le signal en parties successives pour exploiter des facteurs de réutilisation. Plutôt que de multiplier chaque échantillon par chaque exponentielle de façon indépendante, on

profite de la redondance dans les termes $e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$ pour ne pas recalculer plusieurs fois les mêmes coefficients. Ainsi, la TFR aboutit au même résultat, c'est-à-dire la même liste de nombres complexes $F[k]$, mais en beaucoup moins de temps.

Pour ce qui est de l'analyse des signaux EEG, la TFR est essentielle dès que l'on manipule un nombre conséquent de points. Par exemple, si on a 1024 ou 4096 échantillons par seconde, ou en effectue l'analyse en temps réel, effectuer la TFD directe peut vite devenir lourd. Dans un contexte de surveillance médicale ou de recherche en neurosciences, la capacité de traiter des données en quasi-temps réel est cruciale, et seule la TFR rend cela possible sur des machines standard. De plus, le passage par la TFR est indispensable pour appliquer certains filtres fréquentiels ou pour effectuer des compressions de données si l'on souhaite réduire la bande passante ou le stockage.

Le code de l'Indexe B montre clairement la logique mathématique de la TFD : une somme cumulée sur tous les échantillons, pour chaque bin fréquentiel. Toutefois, dans la pratique, on recourt à la TFR afin d'accélérer le calcul. La TFR n'altère pas les résultats, elle fournit exactement les mêmes coefficients complexes, avec la même interprétation en termes d'amplitude et de phase, et donc la même possibilité de reconstituer le signal par la transformée inverse. C'est pourquoi elle est utilisée presque universellement en analyse de signaux EEG, d'images ou d'autres domaines du traitement du signal.

❖ Conclusion

Au terme de cette étude, il apparaît clairement que l'utilisation des transformées de Fourier constitue une méthode robuste et pertinente pour décomposer les signaux EEG en ondes cérébrales. La démarche adoptée permet d'examiner la validité mathématique de ces transformées et leur applicabilité pour extraire les bandes de fréquences caractéristiques du cerveau, telles que les ondes delta, thêta, alpha, bêta et gamma. L'ensemble du travail démontre que, quelle que soit la version de la transformée, qu'elle soit directe, discrète ou

accélérée par la TFR, chacune offre des avantages spécifiques pour l'analyse des signaux EEG dans un contexte numérique (NeurotechEDU, 2015).

Toutefois, il convient de souligner certaines limites et pistes d'amélioration. D'une part, le bruit inhérent à la mesure des signaux EEG n'a pas été spécifiquement pris en compte dans cette étude : il aurait été judicieux d'investiguer dans quelle mesure la transformée de Fourier, éventuellement associée à des filtres fréquentiels, peut aider à débruiter les enregistrements bruts. D'autre part, on s'est principalement attaché à décomposer le signal pour identifier la présence de bandes de fréquences caractéristiques (delta, thêta, alpha, bêta, gamma), sans pour autant réaliser de reconstruction explicite du signal à partir de ces composantes. Or, la capacité à reconstituer l'EEG depuis les coefficients de Fourier serait un test intéressant pour valider plus en profondeur la méthode et quantifier la perte d'information éventuelle.

Par ailleurs, l'étude se concentre sur des exemples à 8 ou 256 échantillons, mais il serait utile d'envisager un protocole plus vaste, avec des segments EEG plus longs et des fréquences d'échantillonnage différentes, pour mieux cerner les contraintes pratiques (comme la taille des données ou la variabilité inter-individuelle). On pourrait également approfondir l'exploration de techniques avancées en ce qui concerne les transformées de Fourier rapide (TFR) dans un contexte de temps quasi réel, voire comparer d'autres approches de décomposition comme, les ondelettes afin de cerner dans quelle mesure les transformées de Fourier offrent l'optimum en termes de rapidité et de précision.

❖ Bibliographie

- "Build Software Better, Together." GitHub, n.d., <https://github.com/topics/brain-computer-interface>.
- Douglas, B. "Introduction to the Fourier Transform." YouTube, n.d., <https://www.youtube.com/watch?v=1JnayXHhJlg&t=1s>.
- He, Qiheng, et al. "Brain-Computer Interfaces in Disorders of Consciousness." *Neuroscience Bulletin*, vol. 39, no. 2, 2023, pp. 348–352, doi:10.1007/s12264-022-00920-y.
- "Intro to Brain Computer Interface." NeurotechEDU, n.d., <https://learn.neurotechedu.com/introtobci/>.
- "La Transformée de Fourier Discrète." *La Transformée de Fourier Discrète, Sciences et Techniques*, n.d., www.ferdinandpiette.com/blog/2011/05/la-transformee-de-fourier-discrete/.
- "Nyquist Frequency." Gatan, Inc., n.d., <https://www.gatan.com/nyquist-frequency>.
- Roohi-Azizi, Mahtab, et al. "Changes of the Brain's Bioelectrical Activity in Cognition, Consciousness, and Some Mental Disorders." *Medical Journal of the Islamic Republic of Iran*, vol. 31, no. 53, 3 Sept. 2017, doi:10.14196/mjiri.31.53.
- The Editors of Encyclopaedia Britannica. "Fourier Transform." *Encyclopedia Britannica*, 15 Feb. 2025, <https://www.britannica.com/science/Fourier-transform>. Accessed 2 Mar. 2025.

❖ Indexe

➤ Indexe A

2.00	-75.68
2.00	-38.57
2.01	6.84
2.01	-15.63
2.02	-60.06
2.02	-51.76
2.02	-5.86
2.01	0.98
2.02	-49.80
2.02	-63.96
2.02	-17.09
2.03	8.30
2.03	-34.67
2.04	-74.71
2.04	-36.13
2.04	9.28
2.05	-19.04
2.05	-62.50
2.06	-41.99
2.04	-7.32

2.04	-14.65
2.05	-58.59
2.05	-64.45
2.06	-16.11
2.06	4.88
2.06	-34.18
2.07	-61.52
2.07	-16.60
2.08	18.07
2.08	-22.46
2.08	-58.11
2.08	-36.13
2.09	0.98
2.09	-18.55
2.10	-71.29
2.10	-64.94
2.10	-10.74
2.11	-7.81
2.11	-52.73
2.12	-62.01
2.12	-16.60
2.12	11.23
2.13	-29.79
2.13	-57.13

2.14	-22.46
2.14	3.91
2.15	-33.69
2.15	-73.73
2.15	-47.36
2.16	-8.79
2.16	-18.07
2.17	-61.04
2.17	-65.92
2.17	-17.09
2.18	-6.35
2.21	-51.76
2.21	-73.24
2.21	-33.20
2.22	-5.86
2.22	-40.04
2.23	-73.73
2.23	-45.41
2.23	-0.98
2.24	-21.00
2.24	-68.85
2.25	-45.90
2.25	6.84

2.24	-3.91
2.24	-51.76
2.24	-51.76
2.25	-2.93
2.25	13.18
2.26	-31.25
2.26	-53.22
2.26	-9.77
2.27	13.67
2.27	-36.13
2.28	-67.87
2.28	-29.79
2.28	11.72
2.28	-14.65
2.29	-59.08
2.29	-44.92
2.30	-2.44
2.30	-7.81
2.30	-58.11
2.31	-61.04
2.31	-5.86
2.32	5.86
2.32	-42.97

2.32	-67.87
2.32	-24.90
2.33	11.72
2.33	-24.90
2.34	-64.45
2.34	-37.11
2.34	3.42
2.35	-20.02
2.35	-70.80
2.36	-62.01
2.36	-16.11
2.36	-7.81
2.37	-49.80
2.37	-69.34
2.37	-22.95
2.38	4.39
2.38	-41.50
2.39	-69.82
2.39	-26.86
2.39	12.21
2.40	-24.90
2.40	-68.36
2.41	-41.02

2.41	8.30
2.41	0.98
2.45	-48.83
2.45	-41.99
2.45	6.84
2.46	4.39
2.46	-41.99
2.47	-55.18
2.47	-8.30
2.47	13.67
2.48	-34.67
2.48	-65.43
2.49	-21.97
2.49	16.11
2.48	-14.65
2.48	-59.08
2.48	-46.88
2.49	3.91
2.49	0.49
2.50	-56.64
2.50	-72.75
2.50	-27.83
2.51	-8.79

2.51	-52.25
2.52	-78.13
2.52	-32.71
2.52	0.49
2.52	-41.50
2.53	-76.17
2.53	-40.04
2.54	2.44
2.54	-14.65
2.54	-64.94
2.55	-62.01
2.55	-4.88
2.56	-4.39
2.56	-62.01
2.56	-67.38
2.56	-9.77
2.57	13.18
2.57	-35.64
2.58	-64.45
2.58	-18.55
2.58	17.58
2.59	-20.02
2.59	-62.99

2.60	-37.11
2.60	5.37
2.60	-10.74
2.61	-55.18
2.63	-48.34
2.63	-1.46
2.63	1.95
2.64	-43.46
2.64	-52.25
2.64	0.98
2.65	19.04
2.65	-28.81
2.66	-62.50
2.66	-31.25
2.66	15.63
2.67	-19.04
2.72	-70.31
2.72	-41.02
2.72	9.77
2.73	1.95
2.73	-46.88
2.74	-53.22
2.74	-10.74

2.74	-2.44
2.75	-48.34
2.75	-61.04
2.76	-9.77
2.76	18.55
2.76	-29.30
2.76	-67.38
2.77	-29.79
2.77	9.77
2.78	-21.00
2.78	-59.08
2.78	-36.62
2.79	-0.49
2.79	-6.35
2.80	-41.50
2.80	-49.80
2.80	-3.42
2.79	9.77
2.80	-35.16
2.80	-59.57
2.81	-19.04
2.81	16.11
2.81	-17.09

2.82	-54.69
2.82	-30.27
2.83	9.28
2.83	-10.74
2.83	-53.71
2.84	-48.34
2.81	-5.37
2.81	-1.46
2.82	-47.85
2.82	-62.50
2.82	-15.14
2.83	9.28
2.83	-35.64
2.84	-70.80
2.84	-37.11
2.84	-3.42
2.85	-35.16
2.85	-75.68
2.83	-48.83
2.84	0.00
2.84	-11.23
2.85	-60.06
2.85	-50.29

2.85	1.95
2.86	5.86
2.86	-37.60
2.87	-52.25
2.87	-1.46
2.87	20.51
2.88	-31.25
2.89	-58.59
2.90	-17.58
2.90	13.67
2.91	-21.00
2.91	-59.08
2.91	-34.18
2.92	4.39
2.92	-3.42
2.93	-44.92
2.93	-41.02
2.93	2.44
2.94	6.35
2.94	-42.48
2.94	-66.89
2.95	-17.58
2.95	14.16

2.96	-33.69
2.96	-70.31
2.96	-34.18
2.97	4.39
2.97	-28.81

➤ Indexe B

```
import csv
```

```
import cmath
```

```
import math
```

```
def lire_csv(nom_fichier):
```

```
    """
```

Lit un fichier CSV contenant deux colonnes :

- Colonne 0 : temps (secondes)

- Colonne 1 : amplitude EEG (microvolts)

Retourne une liste des valeurs EEG (une par ligne).

```
    """
```

```

# ... (voir texte intégral dans le message original)

def transformee_fourier_discrete(signal):

    """

    Calcule la TFD d'une liste de valeurs (signal) et

    retourne une liste de nombres complexes.

    """

    # ... (voir texte intégral dans le message original)

def ecrire_csv(nom_fichier, donnees_freq, fs=1.0):

    """

    Écrit les coefficients de la TFD dans un fichier CSV.

    """

    # ... (voir texte intégral dans le message original)

def main():

    # ... (voir texte intégral dans le message original)

```

```
if __name__ == "__main__":
```

```
    main()
```